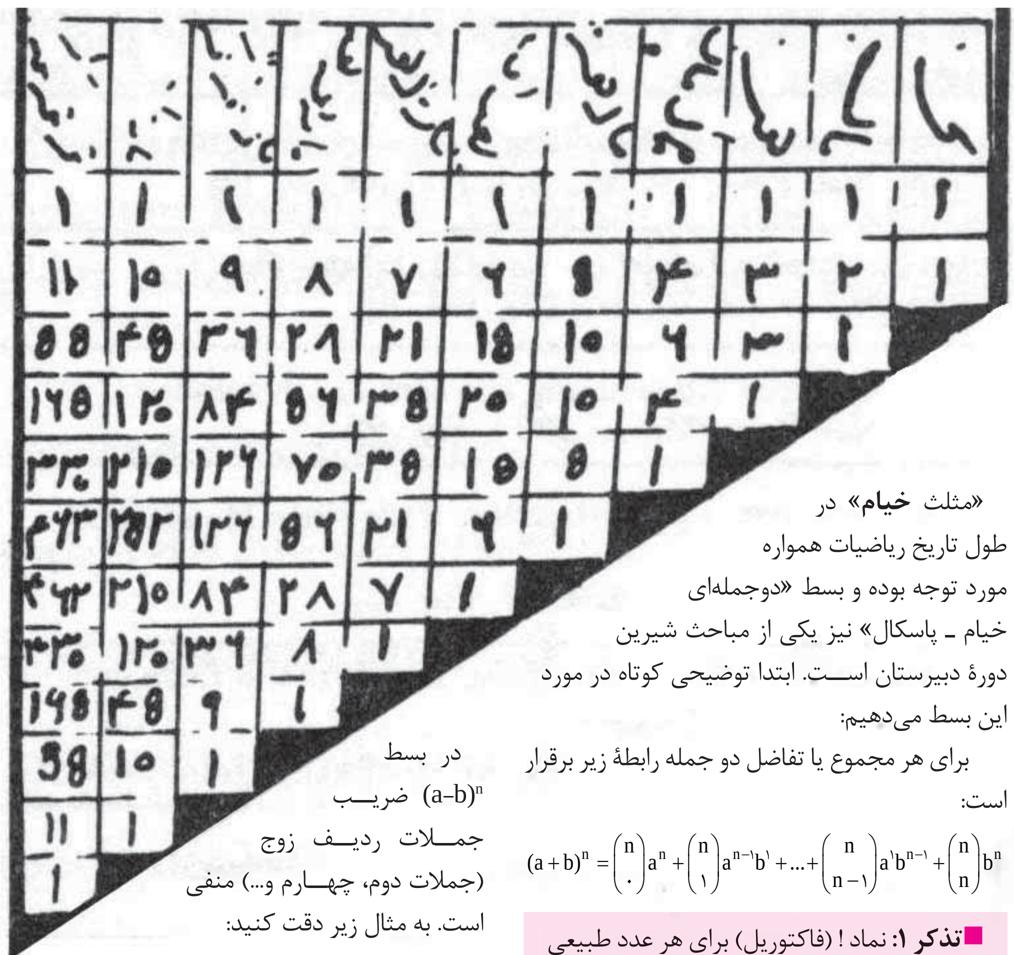
محمدحاجی‌محمدحسینی
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی و فیزیک
از دماوند

بسط دوجمله‌ای و بخش‌پذیری عددها

مقدمه

ممکن است وقتی شـــاخه‌های گوناگون ریاضی را مطالعه می‌کنیم، در نگاه اول هیچ ارتباطی میان آن‌ها مشـــاهده نکنیم. اما در حقیقت چنین نیست. در این مقاله قصد داریم به ذکر یک رابطهٔ جالب در مورد بسط دوجمله‌ای و مبحث بخش‌پذیری عددها بپردازیم.



«مثلث **خیام**» در طول تاریخ ریاضیات همواره مورد توجه بوده و بسط «دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال» نیز یکی از مباحث شیرین دورهٔ دبیرستان اســـت. ابتدا توضیحی کوتاه در مورد این بسط می‌دهیم:

برای هر مجموع یا تفاضل دو جمله رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

■**تذکر ۱:** نماد ! (فاکتوریل) برای هر عدد طبیعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$n! = 1\times 2\times 3\times \dots \times n$

■**تذکر ۲:** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

در بسط $(a-b)^n$ ضریـب جمـلات ردیـف زوج (جملات دوم، چهـارم و...) منفی است. به مثال زیر دقت کنید:

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

اکنون بسط دوجمله‌ای را در نظر بگیرید. اگر مقدار باز شدهٔ $(a+b)^n$ را بنویسیم و در آن از a فاکتور بگیریم، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$(a+b)^n = a(a^{n-1} + na^{n-2}b^1 + ... + na^0) + b^n = aQ + b^n$$

با فرض صحیح بودن a و b در عبارت بالا Q یک عدد صحیح است.

نتیجه: برای به‌دست آوردن باقی‌ماندۀ تقسیم $(a+b)^n$ بر a کافی است، باقی‌ماندۀ تقسیم b^n بر a را بیابیم.

مثال: باقی‌ماندۀ تقسیم 20^5 بر ۱۸ را بیابید.

حل: 20^5 را می‌توان به‌صورت $(18+2)^5$ نوشت. پس برای به‌دست آوردن باقی‌ماندۀ این تقسیم کافی است، باقی‌ماندۀ تقسیم 2^5 بر ۱۸ را بیابیم که ۱۴ است. پس باقی‌ماندۀ تقسیم اصلی نیز ۱۴ است.

اکنون به سراغ عددها و مبناها در کتاب ریاضیات گسستۀ سال چهارم می‌رویم:

اگر A یک عدد در مبنای n باشد، آن‌گاه برای بردن این عدد به مبنای ۱۰ از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$A = (a_k a_{k-1} ... a_1 a_0)_n = a_0 n^0 + a_1 n^1 + ... + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k$$

پس اگر یک عدد در مبنای ۱۰ نیز باشد، می‌توان فرمول فوق را در مورد آن به‌کار برد.

مثال: عدد ۲۳۴ را در نظر بگیرید:

$$234 = 4(10)^0 + 3(10)^1 + 2(10)^2 = 4 + 30 + 200 = 234$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم عدد $A = (a_k a_{k-1} ... a_1 a_0)_{10}$ که در مبنای ۱۰ است، آیا به یک عدد دلخواه x که $x \in Z$ و $1 < x < 20$ بخش‌پذیر است یا خیر؟

$$A = a_0(10)^0 + a_1(10)^1 + ... + a_{k-1}(10)^{k-1} + a_k(10)^k$$

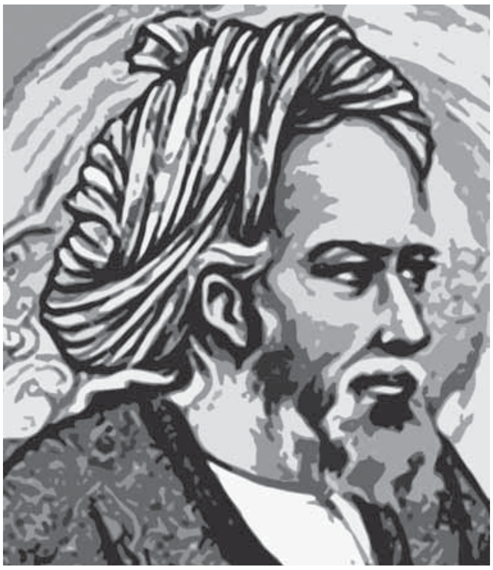
حال در عبارت فوق می‌توانیم به جای ۱۰ مقدار x+y را قرار دهیم؛ به‌طوری‌که: $x+y=10$ و $x,y \in Z$:

$$A = a_0(x+y)^0 + a_1(x+y)^1 + ... + a_k(x+y)^k$$

حال با توجه به نتیجۀ قسمت قبل، باقی‌ماندۀ تقسیم A بر X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r = y^0 a_0 + y a_1 + ... + y^k a_k$$

تذکر: در عبارت $y^m \geq x$ می‌توان برای سهولت در محاسبه، به جای y^m باقی‌مانده y^m/x را جای‌گذاری کرد.



مثال: باقی‌ماندۀ تقسیم ۱۶۳۵۹۶ بر ۷ را بیابید.

$$x = 7,\ \ x + y = 10 \Rightarrow y = 3$$

$$r = 3^0 a_0 + 3^1 a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^5 a_5$$

$$= a_0 + 3a_1 + 2a_1 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5$$

$$\Rightarrow 6 + 27 + 10 + 18 + 24 + 5 = 90$$

باقی‌ماندۀ تقسیم ۹۰ بر ۷ برابر ۶ است، پس باقی‌ماندۀ تقسیم اصلی نیز ۶ است.

حال با روش فوق می‌خواهیم بدانیم، کدام عددهای سه رقمی بر ۸ بخش‌پذیرند:

$$A = a_2 a_1 a_0 = a_0(10)^0 + a_1(10)^1 + a_2(10)^2$$

$$= a_0 + a_1(8+2) + a_2(8+2)^2$$

یعنی مقدار باقی‌ماندۀ عدد A بر ۸ برابر مقدار زیر است:

$$2^0 a_0 + 2^1 a_1 + 2^2 a_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

پس عددهایی مثل ۱۲۸ که حاصل جمع یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن‌ها بر ۸ بخش‌پذیر باشد، بر ۸ بخش‌پذیرند.

تمرین

ـ کدام عددهای سه رقمی بر ۱۲ بخش‌پذیرند؟